2003

TPE

LES FRACTALES

PAOLI Benjamin
VAUTHIER Tom
FRAPPIER Louis
KENDE Mathias

Professeurs :
Mme Le Mailloux
Mme Duchesne

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Bien que connue depuis le XIX^{e} siècle, les fractale n'avait jamais été réellement étudié et était considérées comme des monstres mathématiques jusqu'à ce que Benoît Mandelbrot, mathématicien français (qui s'est inspiré des travaux des mathématiciens Gaston Julia et Pierre Fatou), ne les étudie en tant que telle dans les années 70. C'est lui qui forge le néologisme fractal à partir du latin "fractus" qui veut dire brisé.

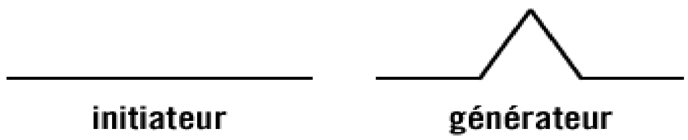
Qu'est ce qu'une fractale ?

Au départ, les fractales n'était que des objets mathématiques. C'est donc par-là que nous allons commencer à les étudier.

LES COURBES FRACTALES

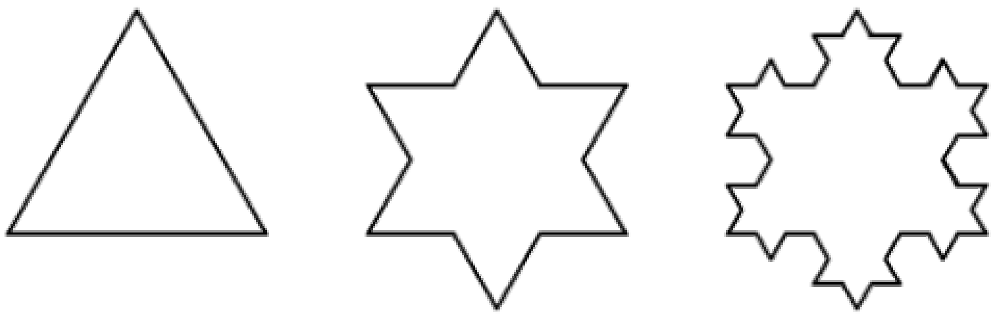
Les courbes fractales sont les fractales les plus simples à se représenter. Elles sont obtenues grâce à une construction géométrique.

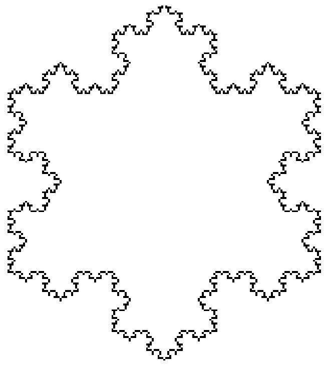
Ici encore, il en existe plusieurs sorte : Les premières sont celle obtenue grâce à un initiateur et à un générateur.



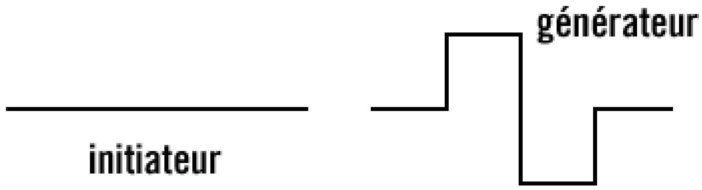
La plus connu des courbes de ce genre est le flocon ou courbe de Von Koch ; c'est à cette courbe que correspondent les figures ci dessus.

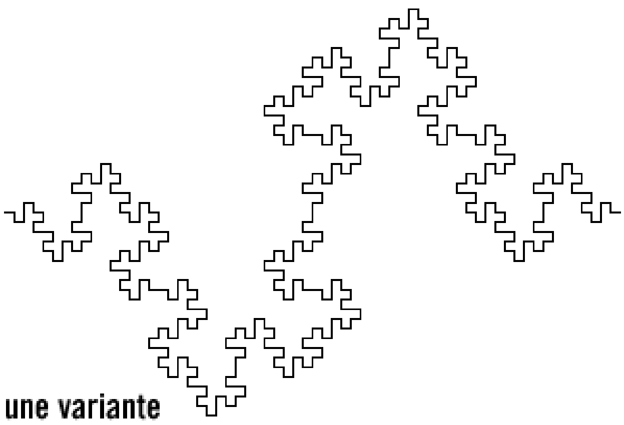
Pour construire cette courbe, on débute avec un initiateur puis on remplace chaque segment de la figure (au départ il n'y en a qu'un) par le générateur. Une étape de la construction va être appelée "itération", puisque l'on répète la même opération un certain nombre de fois. La courbe de Von Koch la plus connue est construite de la manière suivante :





Mais de nombreuses variations existent, en voici un exemple :



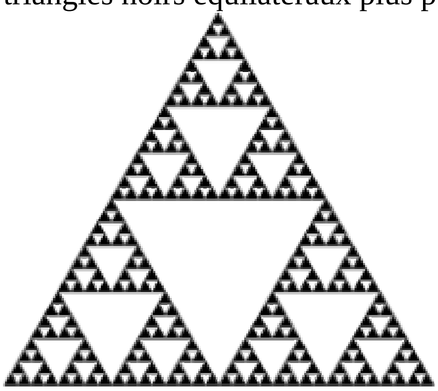


une variante
de la courbe de Von Koch au bout de 2 itérations

Théoriquement, pour obtenir la fractale, il faudrait recommencer faire une infinité d'itération lors de sa construction. Mais dans la réalité, on ne peut même pas afficher (la limite étant la résolution des ordinateurs) les détails obtenus après la cinquième ou sixième itération.

Mais il existe une infinité de manière différente de créer des courbes fractales :

L'un des exemples le plus connu est le triangle de Sierpinski ci dessous. Il est obtenu avec au départ, un triangle équilatéral noir. Dans ce triangle, on évide un triangle équilatéral dont les sommets sont les milieux des arrêtes du premier triangle. Ceci nous donne trois triangles noirs équilatéraux plus petits avec lesquels on recommence le même processus.



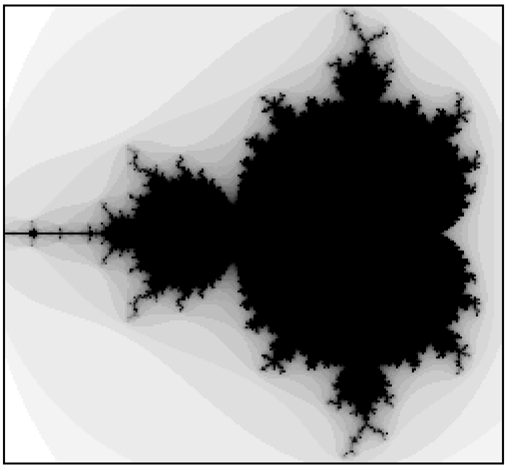
LE TAPIS OU TRIANGLE DE SIERPINSKI

LES FRACTALES DETERMINISTES

Les fractales les plus intéressantes à étudier sont certainement les fractales déterministes.

Elles se construisent sur la base d'un algorithme mathématique :

- à chaque point de l'image on associe une coordonné faites de deux nombres réels. En fait, il s'agit d'un nombre imaginaire.
- puis on élève ce nombre au carré et on lui ajoute une constante (aussi un nombre imaginaire). C'est cette constante qui "fait" la fractal.
- Ensuite, on répète un nombre infini de fois le point précédent en reprenant toujours pour nombre la norme du nombre trouvé par l'itération précédente. En fait, dans la réalité on ne le répète qu'un nombre limité de fois.
- A la fin, on regarde si le nombre que l'on obtient est resté petit ou s'il a grandi vers l'infini (si on ne répète la boucle qu'un nombre limité de fois, dans ce cas on fixe une limite maximale à la place de l'infini). Dans le premier cas ce point fait partie de la fractal (on leur associe la couleur noire le plus généralement) dans le second cas, on associe au point une couleur selon la vitesse à laquel à grandi le nombre qui lui était associé au fil des opérations.
- La figure finale donne la fractal.



FRACTALE DITE ENSEMBLE DE MANDELBROT

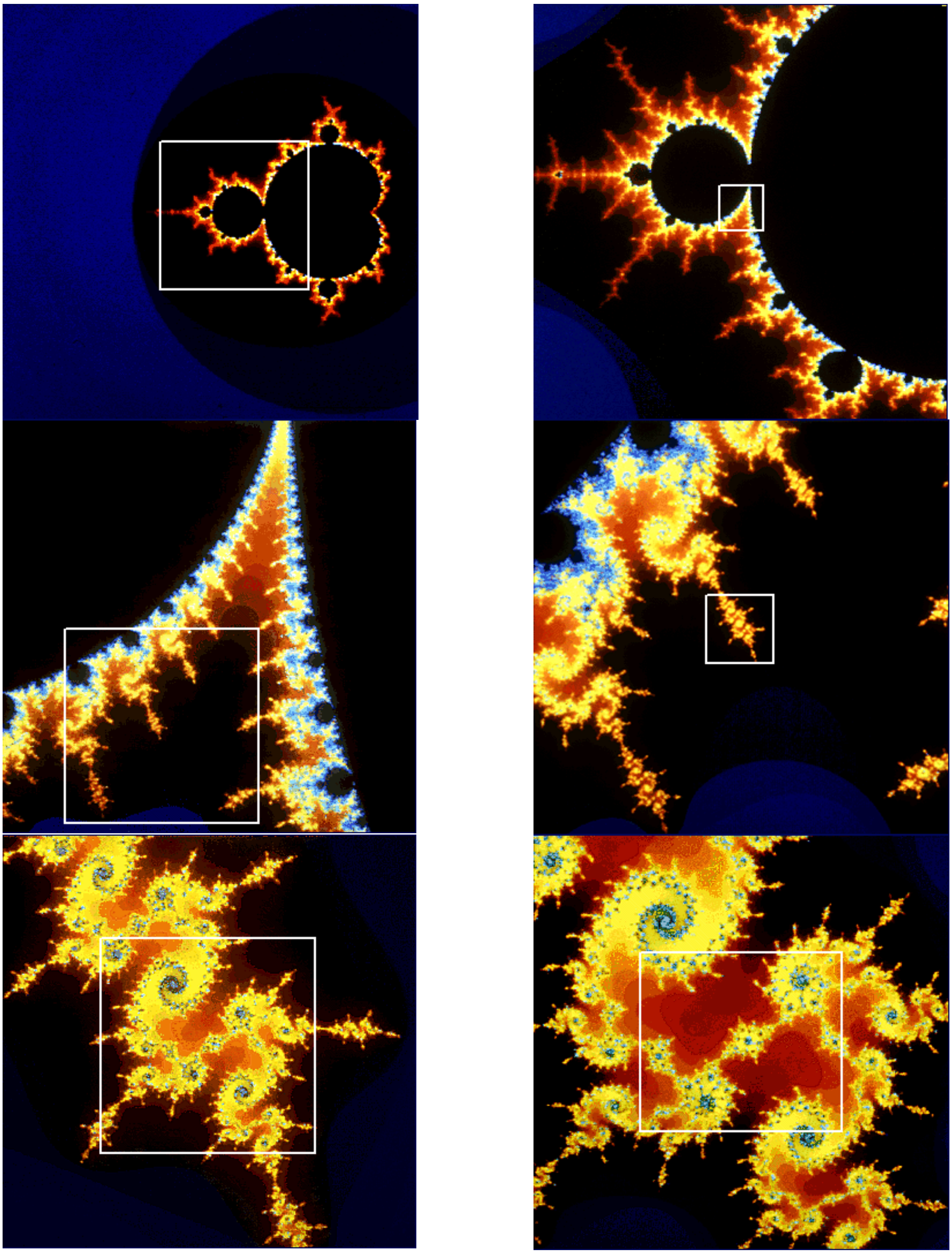
Propriétés des fractales

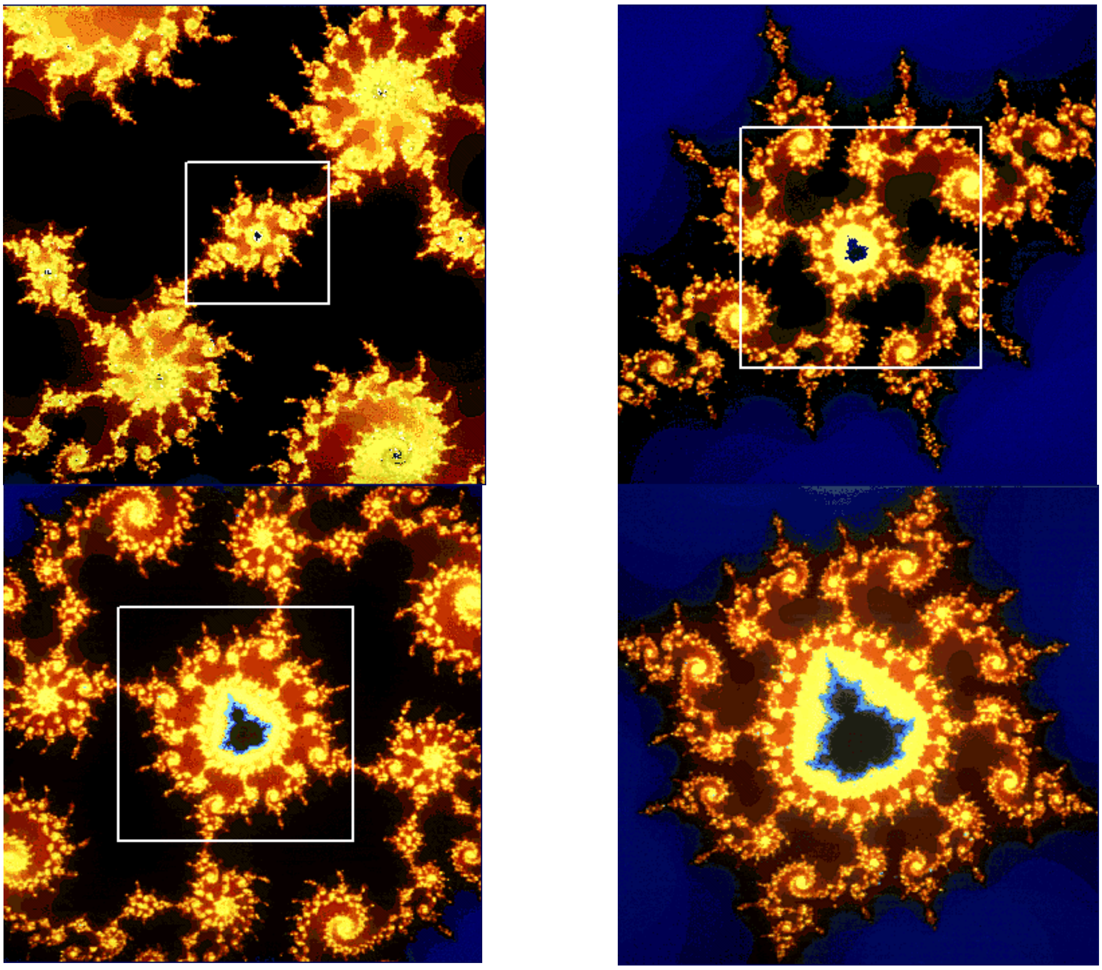
AUTO-SIMILARITE

La propriété la plus connue des fractales est bien sûr leur auto-similarité. Ceci signifie, qu'à différentes échelles, une partie de la fractale sera similaire à la fractale dans son intégralité et ce aussi loin que l'on puisse "zoomer".

ATTENTION, ceci n'est pas vrai pour toutes les fractale. Mais nous ne parlerons pas de fractals ne possédant pas cette propriété car elles ne sont d'aucune utilité ici.

EXEMPLE D'AUTO-SIMILARITE

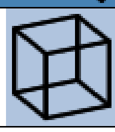




A ce niveau de grossissement, la fractale originale ferait plus de cinq kilometres carres.

Dimension fractale

La deuxième particularité des fractales est leur dimension. Dans la géométrie euclidienne, tous les objets possèdent une dimension entière.

Objets	**Représentations**	**Dimensions**
un point		0
une ligne(droite, courbe...)		1
une figure plane(quadrilatère, cercle...)		2
Une figue dans l'espace (parallélépipède, sphère...)		3

Mais les fractales ne possède pas forcément des dimensions entières :

Pour un objet de dimension 1 (une droite), si on le mesure avec un étalon de longueur x et que l'on trouve une longueur y. Alors pour un étalon de longueur x/2 on trouvera une longueur y*2.

Pour un objet de dimension 2 (un plan), lorsque l'on prend l'étalon de longueur x/2 (tout les coté de l'étalon sont divisé par 2), on trouve comme longueur y*4

Pour un objet de dimension 3, on a y*8.

Si l'on appelle a le coefficient diviseur de x et b celui multiplicateur de y, alors la dimension d'un objet nous est donné en résolvant la formule $a^z=b$ en fonction de z.

On vérifie : si a=2 et b=8 alors $2^x=8$

$2^3=8$

La dimension est 3 (ce qui correspond à ce que nous avions au départ).

La solution générale de l'équation est :

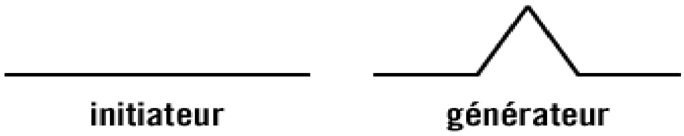
$A^x=b$

$\log(a^x)=\log(b)$

$x * \log(a)=\log(b)$

$x=\log(b)/\log(a)$

Mais essayons pour une figure comme le triangle de Sierpinski.



Si nous prenons l'initiateur comme étalon, la première figure a une longueur de 1.

Mais si nous divisons la longueur de l'étalon par 3. Alors nous devons zoomer 3 fois sur la figure, ce qui nous donne la première itération (ici le générateur). La longueur est donc 4 fois plus grande.

La dimension de la figure est donc log(4)/log(3)=1.2618595…

Ceci veut dire que cette courbe est entre une courbe et un plan. Mais ce résultat pourrait presque sembler naturel car en répétant l'itération de construction à l'infini, le triangle aurait un périmètre infini (ce qui pour une courbe voudrait dire qu'elle est un plan).

LES FRACTALES DANS LA NATURE

LA FRACTALITE DES COTES

INTRODUCTION :

Dans la nature de nombreuses choses ou objets illustrent le concept de fractalité ; comme les montagnes, les nuages, les amas galactiques, la taille des cratères sur la Lune et Mars, la forme des arbres ou des coraux etc…

Nous avons choisi les cotes maritimes car nous pouvons tous assez facilement se les représenter. Introduire des concepts qui peuvent s'avérer être compliqués est plus simple si on les introduits en une chose que nous visualisons bien.

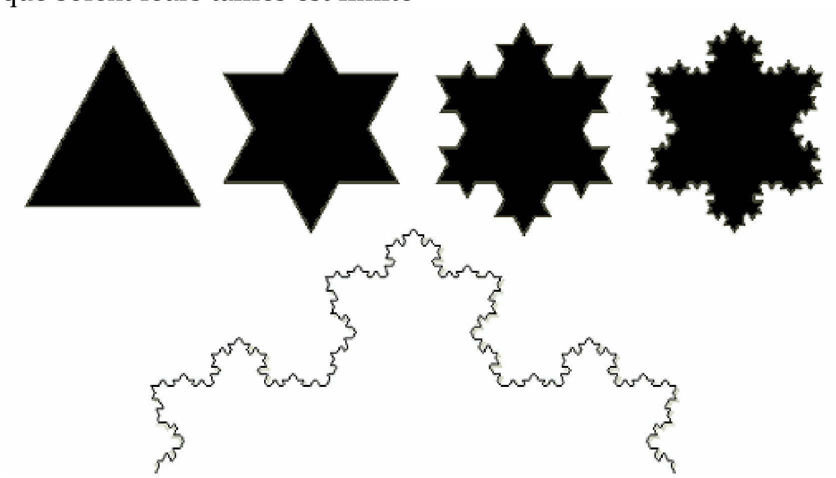
EN QUOI UNE COTE EST FRACTALE ?

Expliquer la fractalité d'une cote peut s'avérer difficile. Prenez les cartes 1 et 2 (cela fonctionne, bien entendu, avec toute carte côtière). Lorsque nous les regardons, nous voyons que les cotes ne sont jamais strictement "plates" mais qu'elles sont composées de caps et baies donnant un aspect craquelé à celle-ci.

Toutes ces baies et caps sont eux même constitués d'autres baies et caps plus petits encore. Et ainsi de suite, je serai tenté de dire jusqu'à l'infini mais dans la nature nous ne pouvons pas parler d'infini.

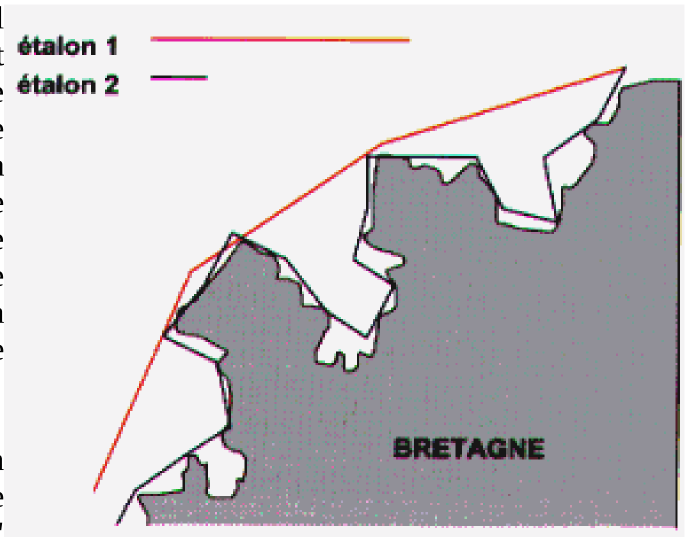
Quoi qu'il en soit, quand vous regardez une cote à une échelle de plus en plus petite, vous visualiserez toujours une cote. Et cela est la définition même d'une fractale, à savoir : nous avons une figure, si on zoom sur une partie de cette figure nous retrouvons la figure de départ c'est l'auto-similarité.

Nous retrouvons cette auto-similarité dans un segment de la courbe de Von Koch. La seule différence réside dans le fait que la courbe de Von Koch est une construction mathématique et donc possédant un nombre infini de "caps" ; alors que le nombre de baies et de caps quelles que soient leurs tailles est limité



PREMIERE CONSEQUENCE DE CETTE FRACTALITE DES COTES

La conséquence la plus frappante et la plus marquante de cette fractalité est sur la longueur de n'importe quelle cote.
En effet comment faisons-nous pour connaître la longueur d'une cote ? Nous nous munissons d'une bonne règle et nous mesurons, sur une carte possédant une échelle, la longueur que nous souhaitons connaître puis, nous reportons cette longueur mesurée sur cette échelle. Nous obtiendrons ainsi une longueur approximative de la cote



Pour avoir une longueur plus précise il suffirait d'avoir une carte plus précise et plus grande. Pourquoi ? Mettons que nous mesurions la longueur d'une cote sur la carte avec une barre de bois plus la carte sera précise et plus cette barre se logera dans les caps et baies que forme cette cotte ; et si nous prenons une barre plus petite la conséquence sera la même : la longueur de la cote augmentera.

Si maintenant nous allons sur le terrain même mesurer cette cote avec cette même barre de bois nous "explorerions" encore plus de recoins de cette cote, et sa longueur augmentera encore. Si nous réduisons la longueur de notre barre jusqu'à que nous puissions mesurer jusqu'au moindre grain de sable voir même jusqu'à la moindre molécule la longueur de la cote augmentera d'autant plus. C'est pourquoi nous pouvons dire que si nous avons une barre infiniment petite, la distance que nous mesurerions avec serait infiniment grande.

C’est Benoît Mandelbrot, éminent scientifique et chercheur dans ce domaine des fractales, qui arriva à cette conclusion.

Prenons comme exemple la cote de Bretagne ; elle pourrait avoir la même longueur que celle de Manhattan ou de la totalité des Etats-Unis, en appliquant le principe de prendre une barre de plus en plus petite.

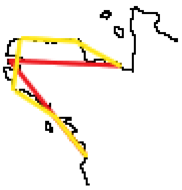
Comme nous l'avons vu précédemment, cette augmentation de la longueur avec la diminution de l'échelle est l'une des caractéristiques des fractales.

SECONDE CONSEQUENCE DE LA FRACTALITE DES COTES

Une deuxième conséquence de cette fractalité des cotes est que l’on peut à présent construire des modèles de côtes sachant comment "expliquer" leurs formes. Ceci donne un aspect plus mathématique et théorique à ce qui aurait pu nous sembler au contraire comme étant une des choses les plus concrètes.

Cette conséquence peut nous paraître mineure cependant pour les mathématiciens comme pour les physiciens cela leur permet d’étudier des formes naturelles qui ne semblaient pas être constituées "normalement" ou ayant des formes trop aléatoires.

Je ne sais comment conclure sur un sujet qui ne demande qu’à être étudié toujours plus. Je finirai simplement en disant que la réponse apportée par Mandelbrot au problème qu’il s’était posé en se demandant quelle était la longueur de la cote de Bretagne, a savoir une longueur infinie, sont mathématiquement justes mais que nous ne devons pas les prendre comme vérités si nous voulons être rigoureux ; la terre n’est pas infinie. C’est pourquoi je veux marquer la frontière existante entre les mathématiques et le monde physique, frontière qui m’a semblée s’amenuiser après avoir fait le point de ce sujet.

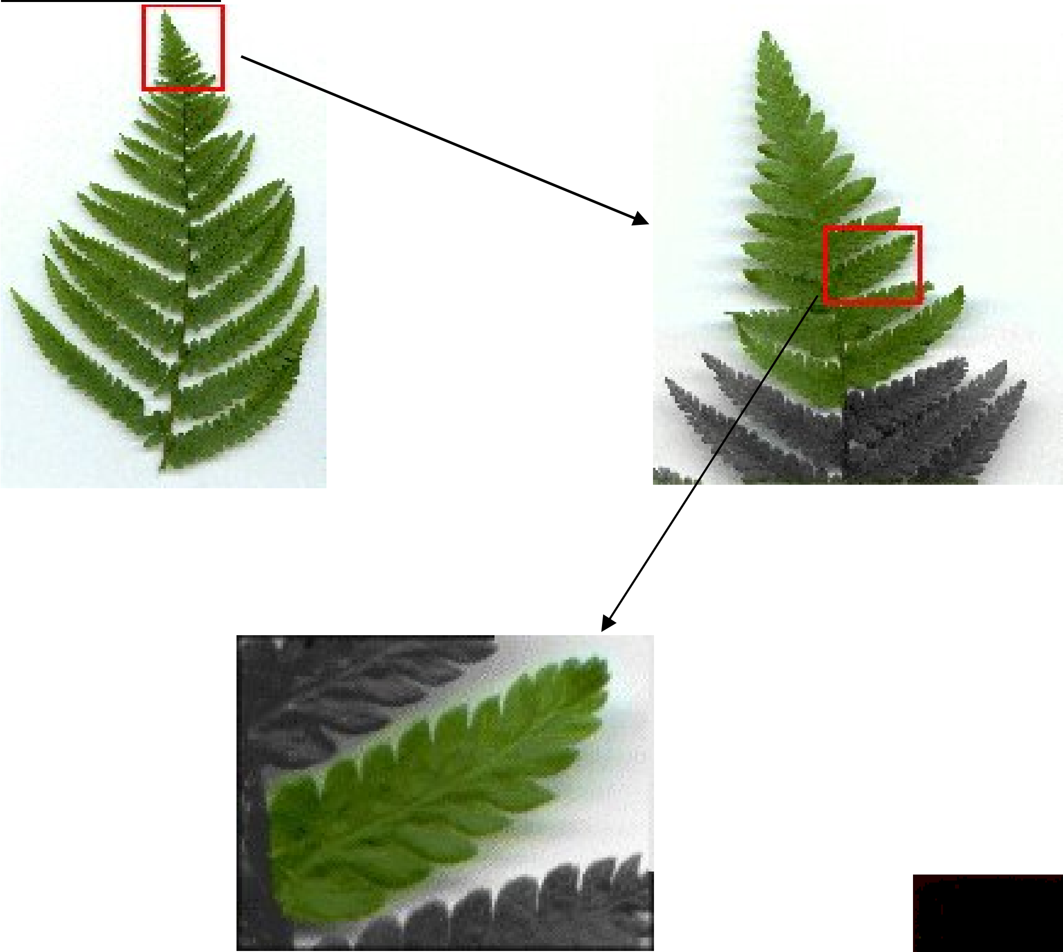


UN AUTRE SHEMA EXPLICATIF : EN ROUGE DES PAS DE LONGUEUR 2 ET EN JAUNE DE LONGUEUR 1.

Les fractales dans les végétaux

De nombreux objets naturels ressemblent à des fractales. Comme le chou ou la fougère. Mais ces objets naturels ne sont pas de vraies fractales, puisque leur complexité n'est pas infinie. La complexité s'arrête au niveau de l'atome, et non au niveau de l'infiniment petit. De même, elle ne s'étend pas dans l'infiniment grand.

LA FOUGERE



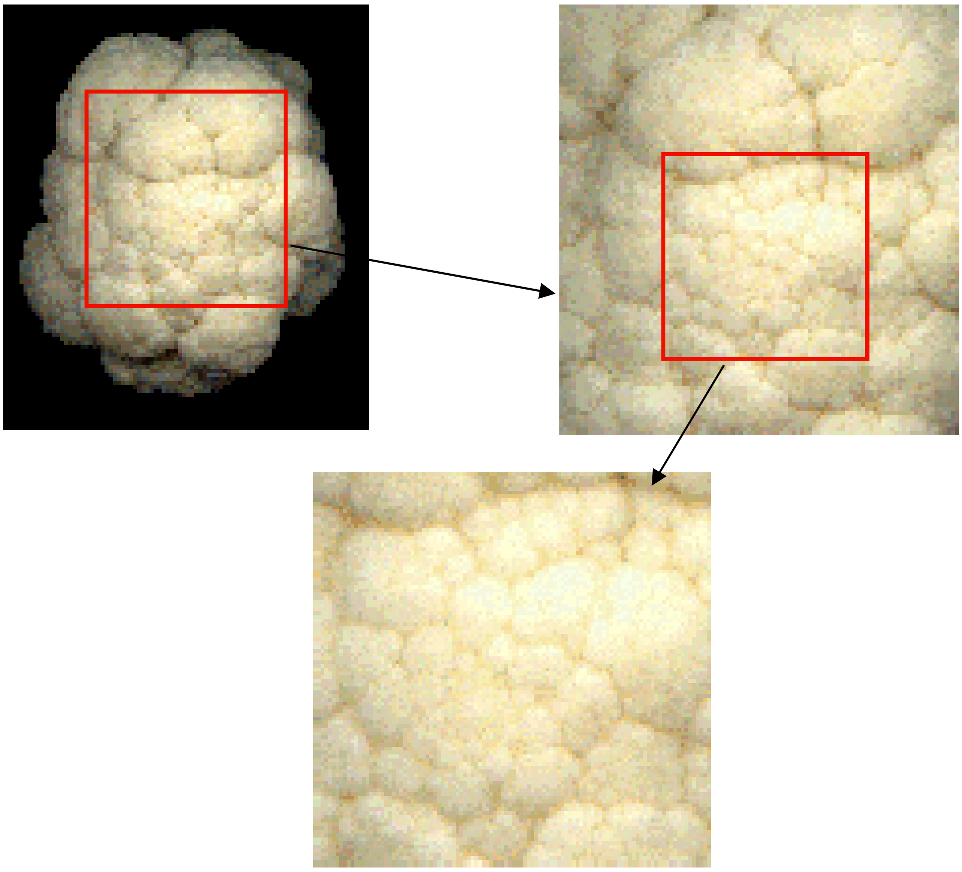
La structure se répète ici à plusieurs niveaux, a chaque étape on retrouve la même organisation, celle globale de la feuille.

Mathématiquement, en utilisant un ensemble de fonctions simples itérées un grand nombre de fois. On peut obtenir des images de fougères très réalistes. Selon ce principe, on peut simuler la croissance de nombreux végétaux ce qui donne des images difficiles à distinguer de véritables photographies.

FOUGERE OBTENUE PAR SIMULATION MATHEMATIQUE

Le Chou-fleur

Le chou-fleur a une forme remarquable. Grossièrement, il se présente comme une section de sphère entourée de feuilles. Si on regarde de près la surface du chou-fleur, on remarque que celle-ci est constituée de cônes qui se juxtaposent de manière enroulée en spirale, formant ainsi des volutes qui constituent elles-mêmes des cônes similaires aux premiers, mais d'échelle plus grande.



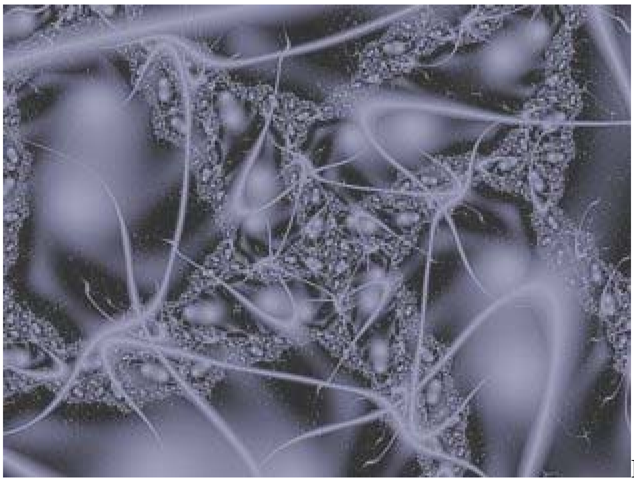
Si on ouvre le chou-fleur en le cassant, on observe une structure en branches principales qui se séparent en branches plus petites. La première division se produit sur la branche principale d'origine, et peut donner de 3 à 8 branches secondaires. Cette division se reproduit de la même manière à chaque étage avec une régularité étonnante. A vue d'œil on peut distinguer entre 5 et 8 étages de divisions entre la branche d'origine et la surface du chou-fleur. A chaque étage les subdivisions sont proportionnellement similaires.

Conclusion

Ici encore, on trouve dans ces objets naturels des caractéristiques fractales. Pourtant, il ne s'agit pas de fractales au sens du terme car celles ci sont finies. On peut néanmoins dire qu'il s'agit de fractales biologiques.

LES FRACTALES DANS LE CORPS HUMAIN

On entend par structure fractale dans la nature des motifs particuliers dont la reproduction récursive génère une auto-similarité entre les différentes échelles d'observation. Ces structures occupent pour un volume fini un espace maximal, sans interférence entre les éléments du motif de la fractale. Dans le corps humain, on découvre régulièrement de nouvelles preuves montrant que notre organisme est fractal. Le premier organe identifié comme tel fut le système pulmonaire. Cette organisation permet principalement de pousser les capacités d'échanges à leur maximum en intégrant une surface la plus grande possible dans un volume faible.

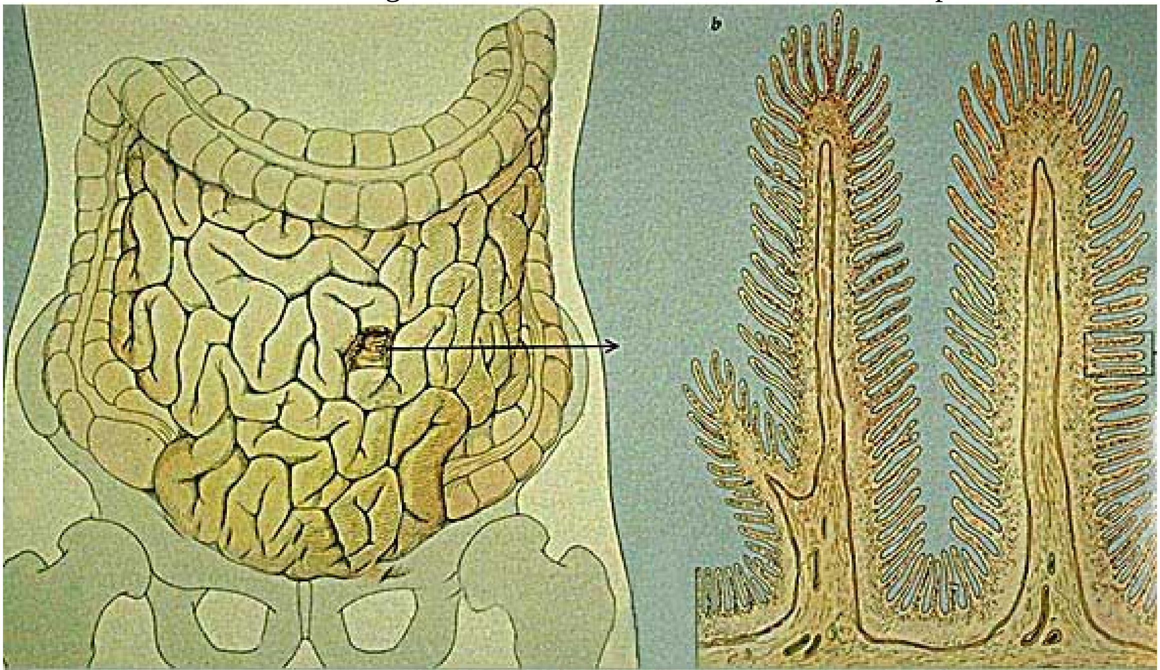


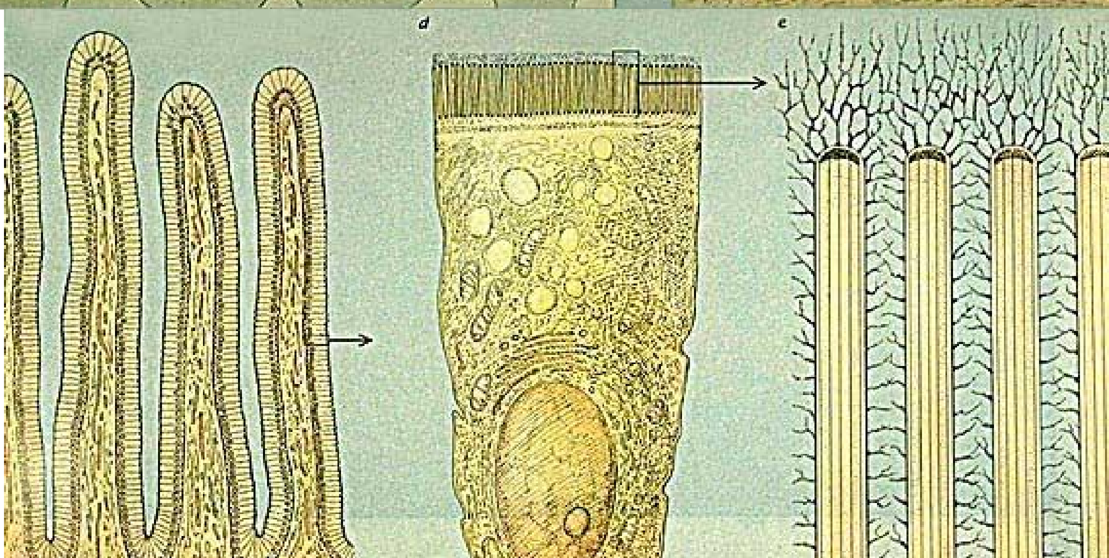
MODELISATION FRACTALE DE NEURONE.

L’intestin grêle.

Lorsque l'on observe la structure de l'intestin grêle à des grossissements différents, l’auto-similarité est évidente, on retrouve les villosités à toutes les échelles d’observations, jusqu’aux cellules de l’intestin (les entérocytes). Chez l'Homme, la surface externe de l'intestin grêle est d'environ 0,5 m², sa surface interne est de 300 m², le gain de surface d’échange est ici évident. dimension fractale de ce système est d’environ 2,7.

a] Vue d’ensemble de l’intestin grêle b] Détail de la paroi intestinale





c] Detail de microvilosite d]Detail d’un enterocyte e]Cils d’enterocytes

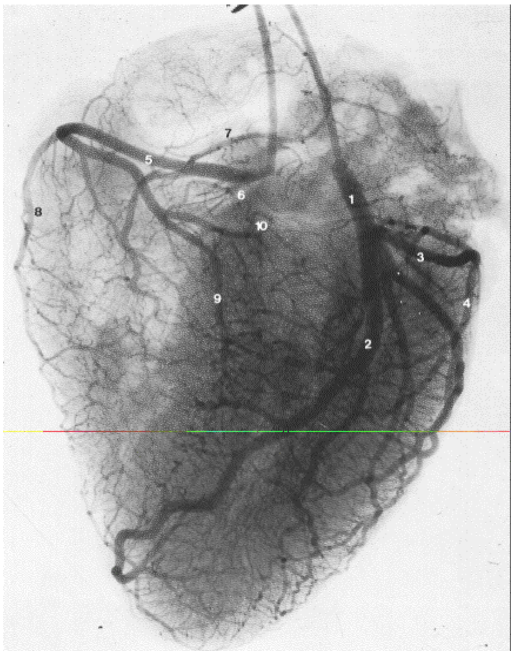
Le réseau sanguin

Le réseau sanguin, les vaisseaux coronaires, de l'aorte aux capillaires, forme un continuum. Il se divise à maintes reprises pour devenir si étroit que les cellules sanguines sont contraintes de circuler en file indienne. Leur ramification est de nature fractale. Aucune cellule n'est jamais éloignée de plus de trois à quatre cellules d'un capillaire. Pourtant les vaisseaux et le sang n'occupent que très peu d'espace. La dimension fractale de ce système est d'environ 2,7.

L'arborescence vasculaire créée une structure qui semble de longueur infiniment grande à l'intérieure d'un volume fini, autrement dit une très grande surface d'échange à l'intérieur d'un volume limité.

Le réseau vasculaire est une organisation fractale, un labyrinthe complexe de bifurcations identiques entre elles sur des échelles de plus en plus petites. Il apparaît ainsi un motif géométrique qui se répète sur des échelles différentes, il y a donc bien auto-similarité. Quelle que soit l'échelle à laquelle on regarde cette structure, l'aspect paraît identique.

EXEMPLE 1 : LE RESEAU CORONAIRE



ON REALISE UNE COUPE TRANSVERSALE DU CŒUR. (AU NIVEAU DU TRAIT VERT).

GROSSISSEMENT 4.5

GROSSISSEMENT 10

Nous allons observer à différentes échelles les ramifications du pilier gauche.

Grossissement du pilier (X4,5) , l'auto-similarité apparaît : on retrouve le même type d'organisation que précédemment.

GROSSISSEMENT 15

GROSSISSEMENT 90

On constate ici clairement que les détails de la structure rappelle la structure elle-même, on ne peut connaître l'échelle de la représentation uniquement à partir de la photo, le motif étant chaque fois semblable.

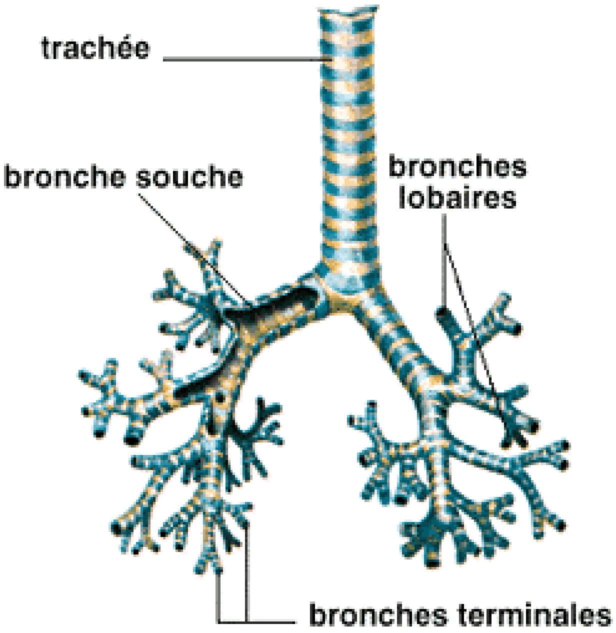
EXEMPLE 2 : LES POUMONS

Les ramifications sanguines pulmonaires présentent une organisation arborescente similaire à celle décrite précédemment :

RAMIFICATIONS SANGUINES PULMONAIRE.

En grossissant l'image sur les ramifications on observerait une organisation identique à celle du réseau coronaire permettant une distribution rapide de l'oxygène dans le sang..

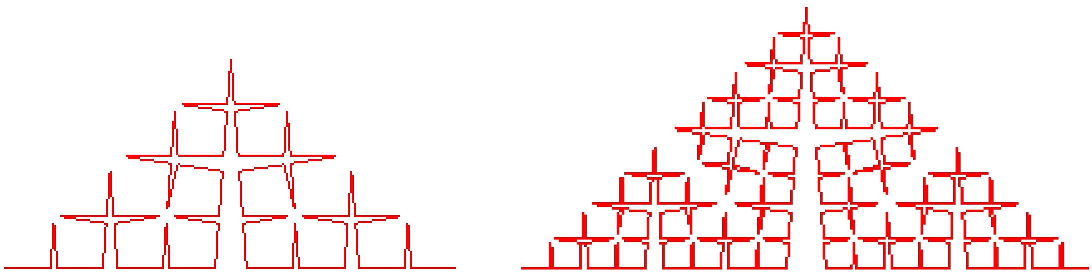
<u>EXEMPLE 3 : ARBRE BRONCHIQUE</u>



Les bronches sont des tubes creux qui se ramifient comme les branches d'un arbre et qui permettent de distribuer l'air de façon homogène aux deux poumons. Cet air rentre dans l'organisme lors de l'inspiration par le nez ou la bouche, passe par le larynx puis par la trachée qui descend à l'intérieur du thorax. La trachée se divise ensuite en deux bronches principales, une pour chaque poumon. Les bronches se divisent ensuite environ 25 fois pour amener l'air jusqu'aux alvéoles pulmonaires. On peu donc parler de structure fractale.

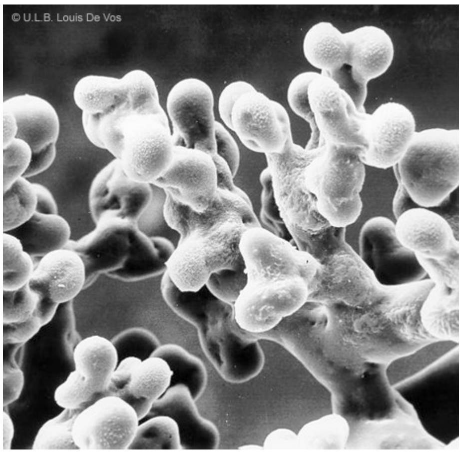
On peut retrouver mathématiquement l'organisation de cet arbre, elle est semblable à une des dérivées du flocon de Von Koch :

GENERATEUR DE LA FRACTALE

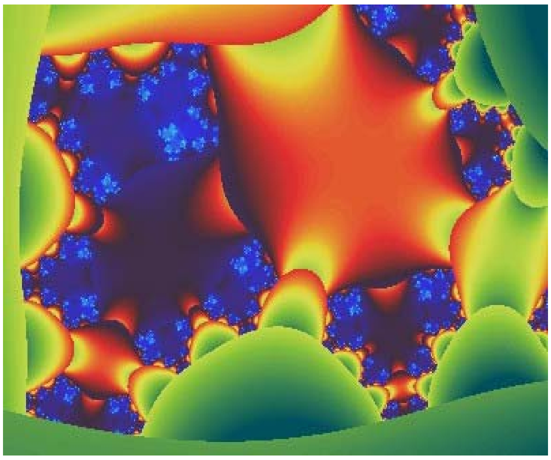


La quatrième étape correspond alors à la formation de sacs alvéolaires composés d'alvéoles servant aux échanges gazeux dont le diamètre varie entre 0,06 et 0,2mm.

On peut aussi trouver d'autre méthode pour modéliser les poumons à l'aide de fractales.



ALVEOLE PULMONAIRE OBSERVE AU MICROSCOPE ELECTRONIQUE A BALAYAGE



FRACTALE GENERE SUR UN ORDINATEUR

CONCLUSION

Cette organisation fractale des poumons permet de décupler les échanges gazeux en multipliant la surface d'échange dans un volume restreint. Le nombre d'alvéoles dans les deux poumons est estimé entre 200 et 750 millions d'alvéoles, ce qui correspond à une surface d'échange variant entre 55 et 200m². En imaginant des poumons assimilés à des sphères, ayant une même surface d'échange sans organisation fractale, chaque poumon aurait un diamètre compris entre 3 et 5,6 mètres. Cet impressionnant gain de surface et d'espace est une preuve de l'intérêt d'une organisation fractale adoptée par la nature.

CONCLUSION

En guise de conclusion sur ce fascinant sujet des fractals, nous pouvons dire que c'est seulement depuis la parution des travaux de Benoît Mandelbrot que nous commençons à bien percevoir ce qu'est, et quel est l'intérêt de la conformation fractal. En effet ses travaux ont permis entre autres, de rationaliser des formes qui nous semblaient avant cela irrationnelles.

Si nous savons qu'il est relativement facile de "faire des fractals" sur du papier ou un ordinateur, il était légitime de se demander si ces fractals existaient déjà dans la nature.

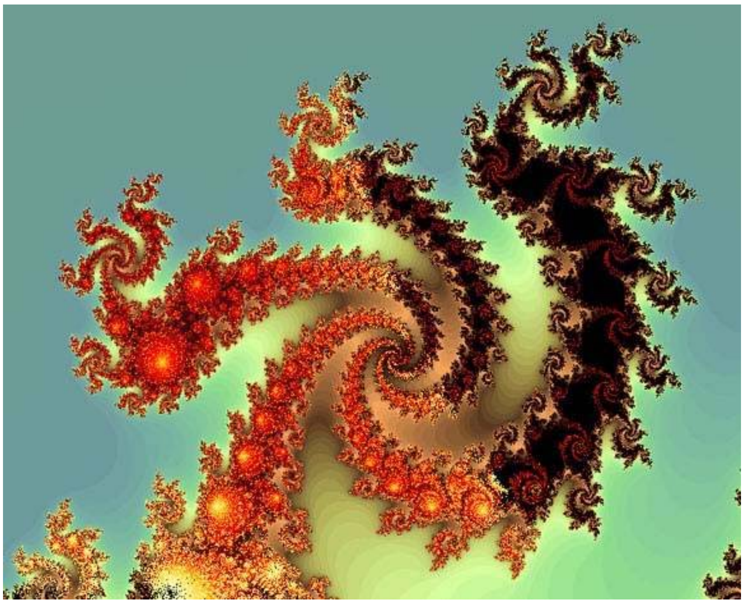
Des scientifiques s'étant penchés sur cette question ont répondu oui. Nous pouvons (comme citer avant dans ce travail) parler du réseau coronarien, des villosités intestinales, ou encore des poumons, de la forme de certaines fougères et choux-fleurs.

La question qui venait ensuite était "pourquoi ?". La réponse est : "Pour faciliter les échanges", en effet Mandelbrot a prouvé que les fractals avaient, pour une aire (ou un volume) limité, un périmètre infini offrant donc une surface de contact immensément grande (mais tout de même pas infinie pour les être vivant qui eux sont "fini").

Le deuxième point expliqué par la dimension fractal est, comme dit ci avant dans notre travail, un point utilitaire.

En effet ce concept a permis d'expliquer des formes qui semblaient d'autant plus inexplicables qu'elles n'étaient régies par aucune loi (à la différence des exemples précédents dont la forme est régie par l'A.D.N.).

Les côtes maritimes, les nuages, les montagnes etc… sont les exemples les plus illustratifs. Et le fait d'avoir "mathématisé" ces choses nous a permis d'élargir encore notre connaissance de l'univers…



Pour finir, nous tenons à remercier encore une fois Mme Duchesne et Mme Le Mailloux pour avoir encadré nos efforts, nous remercions aussi nos parents qui nous ont soutenus pendant notre travail. Enfin, nous remercions Benoît Mandelbrot pour le fantastique sujet de recherche qu'il nous a offert.

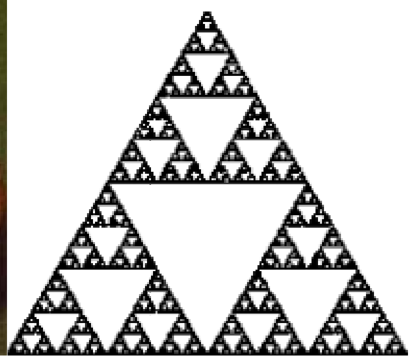
OUVERTURE

Après ce travail, nous conservons beaucoup d'interrogations, que nous n'avons pas pu traiter dans ce dossier (le plus souvent parce que les sources étaient inexistantes).

Il nous restait plusieurs réponse à notre problématique que nous n'avons pas pu valider. Nous les énonçons quand même ici :

- Les fractales simplifient la description d'objets complexes comme cela a été évoqué plus haut. Il est possible, que des formes de vie adoptant des conformations fractales aient plus de chance d'apparaître dans l'évolution car la quantité de matériel génétique demandé pour les décrire est peut-être plus faible (bien que les être vivant ne fonctionnent pas comme des ordinateurs).
- Un autre exemple que nous n'avons pas pu traiter était le cerveau. Plus précisément le cortex supérieur car celui ci possèdent en tant que plan une dimension fractal de l'ordre de 2,75. Ce chiffre est le plus élevé du règne animal et des chercheurs pensent que dans quelques milliers d'années nous auront peut-être un cortex de dimension fractal très proche de 3. Ceci peut s'expliquer car les neurones du cortex étant disposés en couche, un plan qui occuperait un volume (donc de dimension 3) aurait une surface infinie (dans notre cas, il y aurait seulement beaucoup de place pour plus de neurones sur une surface qui ne serait pas infini)

En plus de cela, il reste des mystères. Comme ce coquillage Cymbolia innexa REEVE qui arbore sur sa coquille des motifs identiques en tout point avec le triangle de Sierpinski que nous avons vu plus haut.

SOURCES :

http://imagerie-cv.univ-lyon1.fr/WEB_CARDIO/documents/Documents_references/coronaires/anatomie/Anatom05.htm

http://www.unice.fr/LEML/coursJDV/morpho/morpho6-2.htm

http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/svt/pratikp/college/grtravail/la_paroi_intestinale.htm

http://barbara.petit.free.fr/fractales/corps.html

Gleick, James, *La théorie du chaos,* Flammarion, 1989

Mandelbrot, Benoît, *Les objets fractales*

Hors série de la recherche *L'ordre et le chaos*.

http://science-univers.qc.ca/cosmologie/fractale.htm

http://mapage.noos.fr/ulysseus/index.htm

encyclopédie en ligne encarta http://encarta.msn.fr article fractales

encyclopédie en ligne Webencyclo http://www.webencyclo.com article fractales

encyclopédie Hachette sur http://fr.encyclopedia.yahoo.com article fractales (les)

Portail thinkquest recherche Fractales
http://library.thinkquest.org
Amenant au site :
http://library.thinkquest.org/25810/cgi-bin/fido.cgi?whichtype=0&page=..%2Fsitemap.txt#introduction

http://www.riffraffuk.demon.co.uk/

http://les fractales.multimania.com/frame.html

http://fractales.free.fr/plan.html

http://josephv.test.free.fr/fractal/definitions.html

http://pedagogie.ac-aix-marseille.fr/etablis/lycees/craponne/fractale/index.htm